جلد ۳ شماره‌ی ۱ بهار ۱۳۹۳

علم و مهندسی سرامیک

مدل سازی فرآیند خشک شدن مخلوط اشباع خاک رس و انقباض قطعه در طی فرآیند

خلیل خلیلی، سید یوسف احمدی بروغنی، محسن باقریان

دانشگاه بیرجند

M.bagherian@gmail.com

چکیده: *در طی خشک شدن سرامیک‌ها به خاطر وجود گرادیان‌های رطوبت، حرارت و فشار، تنش‌هایی در قطعه ایجاد می‌شود. ایجاد و گسترش مدلی جهت توصیف فرآیند خشک کردن محیط‌های متخلخل و بررسی اثرات ناشی از آن شامل تنش‌ها و انقباضات ضروری است. در این تحقیق با در نظرگیری همزمان فرآیندهای انتقال حرارت، انتقال جرم، انتقال ممنتوم و تاثیر انقباضات، مدلی جهت ارزیابی تنش‌ها و انقباض ناشی از خشک شدن مخلوط اشباع خاک رس و آب به کمک اجزاء محدود ارائه شده است. با استفاده از معادلات بقای ممنتوم، تغییر شکل‌ها و تنش‌ها برای هر فاز محاسبه شده است. در این مدل فرض شده است که در مرحله اول خشک شدن، حرکت آب از داخل قطعه به سطح آن توسط قانون دارسی انجام می‌شود و نیروی لازم جهت این انتقال به کمک گرادیان فشار تامین می‌گردد. آزمایشات تجربی جهت محاسبه پارامترهای مورد نیاز مدل انجام شد. مدل به کمک اجزاء محدود حل و نتایج با منحنی‌های خشک شدن حاصل از آزمایشات تجربی مقایسه گردید. در این تحقیق مشخص شد که عامل اصلی انتقال رطوبت از نظر فیزیکی گرادیان فشار منافذ است.*

کلید واژه: *خشک شدن، تغییرات ضخامت، ترک برداشتن، مدول یانگ، انتقال همزمان جرم و حرارت.*

۱- مقدمه

مدل‌سازی فرآیند خشک کردن سرامیک‌ها در توسعه فرآیند و بهبود محصولات سرامیکی جایگاه ویژه‌ای پیدا کرده است. معادلات مشتقات جزئی مبنای مدل‌سازی فرآیند خشک کردن بوده و بایستی در طی پروسه، معادلات مشتقات جزئی چند فیزیکه (پدیده‌های انتقال) در سیستم با گذشت زمان به صورت همزمان حل شوند. در نظر گیری همه مکانیزم‌های انتقال در فرآیند خشک کردن، منجر به غیرقابل حل شدن معادلات به طور همزمان خواهد شد. مدل سازی محققان جهت غلبه بر این مشکل اثرات مکانیزم‌های مختلف را بر روی ضریب نفوذ اعمال می‌کنند که در نتیجه ضریب نفوذ به ضریب نفوذ موثر تبدیل می‌شود. شرود و لوئیس اولین افرادی بودند که در سال ۱۹۲۹ در ایجاد مدل ریاضی خشک کردن با استفاده از معادله حرارت فوریه پیش قدم بودند[۱]. در این مدل، درجه حرارت و ضریب نفوذ حرارتی به ترتیب با رطوبت و ضریب نفوذ آن جایگزین شد. (معادله ۱)

$$\frac{\partial X}{\partial t} = D\nabla^2 X \qquad (۱$$

در انتهای سال ۱۹۳۰ محققان نشان دادند که توزیع رطوبت نمی‌تواند تنها از قانون فیک حاصل شود و عواملی نظیر فشار، نیروی موییننگی، جابجایی تبخیر و... بر آن تاثیر گذار بوده و رابطه ۱ به صورت زیر اصلاح گردید [۲،۳].

[Downloaded from ijcse.ir on 2026-11-15]

[DOR: 20.1001.1.23222352.1393.3.1.1.7]

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla X) \qquad (۲$$

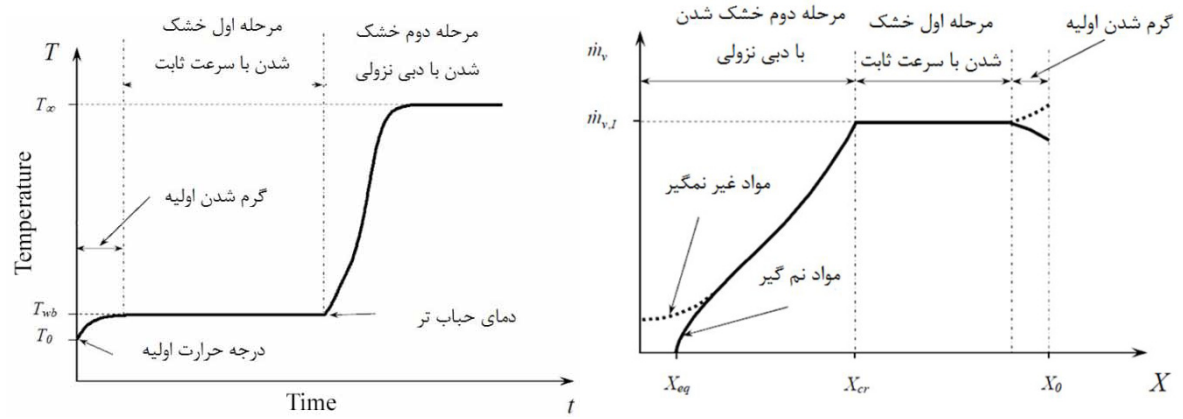
ویتاکر نشان داد که انتقال رطوبت توسط جابجایی را نمی‌توان در این عامل قرار داد و در طی نتایج حاصل از آزمایشات، وی ضریب نفوذ ثابت رطوبت را به صورت تابعی از درجه حرارت و رطوبت بدست آورد [۴،۵]. مدل ویتاکر به خوبی پدیده‌های فیزیکی که در خشک شدن اتفاق می‌افتند را بیان می‌کرد. اما با این وجود معایبی نیز به همراه داشت. بعد از ویتاکر، لیوکو[۶] فرض نمود که شار رطوبت از سه جزء تشکیل شده است: (معادله ۳)

$$\dot{m}_m = -\rho_s \delta_m (\nabla X + \delta_T \nabla T + \delta_P \nabla P) \qquad (۳$$

کومانس [۷] آزمایشاتی طراحی کرد تا بصورت تجربی مقدار ضریب نفوذ را بدست آورد. کتالرز [۸] با در نظر گیری خواص الاستیک مقدار ضریب نفوذ را بدست آورد. آچانتا [۹] با استفاده از مخلوط اشباع ضریب نفوذهای بالاتر را محاسبه و به مدل‌سازی انقباض خشک شدن پرداخت. زاگروبا و همکاران [۱۰] ضریب نفوذ را از منحنی‌های تجربی خشک کردن محاسبه نمودند. مشابه همین تحقیق را مئوبی [۱۱] با لحاظ نمودن تغییر شکل قطعه انجام داد. چمخی و همکاران [۱۲] در راستای توسعه فرایند کرنش‌های ویسکو الاستیک را مدل نمودند. در این تحقیق با در نظرگیری همزمان فرآیندهای انتقال حرارت، انتقال جرم، انتقال ممنتوم و تاثیر انقباضات، مدلی با استفاده از قانون دارسی جهت ارزیابی تنش‌ها و انقباض خشک شدن سرامیک‌ها ارائه و در ادامه مدل به روش اجزاء محدود حل شده است. هدف از این تحقیق انتخاب بهترین شرایط عملیاتی و مناسب‌ترین پارامترها جهت بدست آوردن محصولی با کیفیت و عاری از تنش و ترک است.

۲- سینتیک خشک کردن

خشک شدن با تبخیر مایع در اثر اعمال گرما به قطعه‌تر رخ می‌دهد که در ۲ مرحله جدا از هم را به دنبال دارد. مرحله‌ای که در قطعه انقباض ایجاد می‌شود و مرحله‌ای که بدون انقباض در قطعه است. در مرحله انقباضی (مرحله اول)، فاز گاز وجود نداشته و محیط متخلخل همواره به صورت دو فازی مایع و جامد می‌باشد. در بسیاری از موارد خشک شدن، ابتدا مقدار رطوبت X نسبت به زمان t، به صورت خطی تغییر نموده و سرعت خشک کردن ثابت است (شکل ۱).



شکل ۱- سینتیک خشک کردن در مرحله اول و مرحله دوم [۱۹]

[Downloaded from ijcse.ir on 2026-11-15]

[DOR: 20.1001.1.23222352.1393.3.1.1.7]

در ادامه رطوبت بصورت غیر خطی تا رسیدن به مقدار تعادلی X^* کاهش یافته و سرعت خشک شدن تا رسیدن به مقدار صفر بصورت نزولی تغییر می‌کند.

۳- ۳- مدل‌سازی

طی فرآیند خشک کردن حجم قطعه متاثر از مقدار درصد رطوبت حین فرآیند است [۲۰،۲۱]. قانون دارسی با متغیرهای متوسط حجمی جریان مانند سرعت، فشار و دانسیته کار می‌کند. این مقدار متوسط کمیت‌ها را می‌توان در هر نقطه از فضای همگن به صورت "متوسط مقدار واقعی کمیت بر واحد حجم مشخص در بر گیرنده نقطه"تعریف کرد (شکل ۲). حجم در نظر گرفته شده باید به گونه‌ای باشد که هم در مقابل ابعاد ماکروسکوپی مسئله کوچک باشد و هم شامل چندین سوراخ و اجزاء ماتریکس جامد باشد. بنابراین ضروری است تا قوانین انتقال اصلی برای مقیاس میکرو بر اساس نیروی مومینگی و حرکت مایع ارائه گردد. جهت حل معادلات در مقیاس میکرو درک هندسه مسئله ضروری است و این برای مواد متخلخل بسیار با توجه به تصادفی بودن نحوه قرارگیری ذرات و اندازه آنها، امکان مدل‌سازی واقعی هندسه عملا غیرممکن می‌باشد و بهتر است برای رفع این مشکل از روش متوسط‌های حجمی استفاده شود، که در آن تبدیل معادلات از میکرو به ماکرو انجام می‌گیرد. بدین منظور ابتدا معادلات بقا برای هر جزء نوشته شده و معادلات ماکروسکوپیک از حجم نماینده این معادلات بقا حاصل می‌شود، معادله بقای ممنتوم کلی حاصل جمع معادله بقای ممنتوم جامد و مایع خواهد بود. در نهایت قانون دارسی را می‌توان با قانون بقای ممنتوم مایع جایگزین نمود و به صورت‌های دیگری از قانون بقای جرم دست یافت.

۳-۱- ۳-۱- فرضیات

در طی خشک شدن قطعات متخلخل فرآیندهای انتقال، همزمان رخ داده و منجر به پیچیده شدن مدل خواهد شد. بدین منظور فرضیات زیر جهت ساده‌شدن محاسبات در نظر گرفته شده است:

۱) محیط همواره دو فازی و اشباع باقی خواهد ماند.
۲) خاک رس یک ماده متخلخل همگن است.
۳) شبیه سازی محدود به دوره خشک شدن با سرعت ثابت است.
۴) اثرات جاذبه و جابجایی داخلی در نظر گرفته نشده است.
۵) تبخیر فقط از سطح صورت می‌گیرد (به خاطر فرضیه اشباع)
۶) فاز مایع و جامد تراکم‌ناپذیر هستند.
۷) توزیع رطوبت و حرارت اولیه همگن است و هیچ‌گونه تنش اولیه بر قطعه وارد نمی‌شود.

با توجه به فرض ۵ می‌توان نتیجه گرفت که نرخ تبخیر داخلی با نرخ تبخیر از سطح جامد به محیط برابر است و در نتیجه آن مکانیزم انتقال رطوبت از اختلاف فشار هیدرواستاتیکی و قانون دارسی تبعیت می‌کند.

۳-۲- معادلات پیوستگی (مقیاس میکرو)

خواص فیزیکی سیال (چگالی، ویسکوزیته، فشار) به عنوان متوسط‌های حجمی ذاتی نامیده می‌شوند که همانند یک حجم واحد

[Downloaded from ijcse.ir on 2026-11-15]
[DOR: 20.1001.1.23222352.1393.3.1.1.7]

از حفره‌ها تعریف می‌شوند. بر اساس این تعریف، خواص پارامترهای فیزیکی حاصل می‌شود که می‌توان آنها را به صورت تجربی بدست آورد. سرعت‌های جریان به عنوان متوسط‌های حجمی ظاهری توصیف می‌شوند، به این معنی که بر روی حجم‌های واحد شامل حفره‌ها و ماتریس‌ها متوسط‌گیری شده که این سرعت‌های جریان را سرعت‌های دارسی نامند. چنین توصیفی باعث می‌شود که میدان سرعت در مرزهای بین زیر حوزه‌های متخلخل و زیر حوزه‌های آزاد پیوسته باشد. به واسطه این توصیف‌ها می‌توان جریان را به وسیله یک سری از متغیرهای وابسته برای تمام زیر حوزه‌های متخلخل و جریان آزاد مدل‌سازی نمود. معادله دینامیکی توصیف کننده حرکت سیال را می‌توان با استفاده از قانون دوم نیوتن برای یک ذره سیال بدست آورد. برای دست‌یابی به شکل دیفرانسیلی معادله ممنتوم قانون دوم نیوتن برای یک ذره سیال با جرم بی‌نهایت کوچک خواهیم داشت:

$$\vec{F} = \frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\vec{p} = \int \vec{V}\, dm \qquad \overrightarrow{dF} = dm\frac{\overrightarrow{dV}}{dt} \qquad (۴$$

با داشتن رابطه‌ای برای شتاب یک المان سیال به جرم بی‌نهایت کوچک، که در میدان جریان حرکت دارد می‌توان قانون دوم نیوتن را به شکل برداری نیز نوشت. معادلات کلاسیک انتقال حرارت، انتقال جرم و انتقال ممنتوم برای هر دو فاز جامد و مایع نوشته شده است که از اندیس s برای جامد و از l برای مایع استفاده شده است. معادله بقای جرم در فرم اویلری از رابطه (۵) برای مایع حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_l v_l) = 0 \qquad (۵$$

معادله کلی ممنتوم خطی به صورت رابطه (۶) است [۲۲]:

$$i = l, s \quad j \neq i \quad \rho_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \cdot \nabla v_i\right) = \rho_i f_i + \nabla \cdot \underline{\sigma_i} + \sum_j P_{ij} \qquad (۶$$

ممنتوم زاویه‌ای عبارت است از:

$$i = l, s \quad \underline{\sigma_i} = \underline{\sigma_i}^T \qquad \text{و} \qquad \underline{\sigma_l} \equiv \sum_i (\underline{\sigma_i} - \rho_i u_i u_i) \qquad (۷$$

که u_i سرعت ناشی از جاذبه می‌باشد. با حذف اثرات جاذبه، معادله ممنتوم خطی به صورت رابطه (۸) تبدیل خواهد شد:

$$\nabla \cdot \sigma_l = 0 \qquad (۸) \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial \rho_l h_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_l v_l h_l) = \nabla \cdot (K_l \nabla T_l) \qquad (۹$$

برای فاز مایع شش مجهول وجود دارد: چگالی، سه جزء سرعت، درجه حرارت و فشار مایع. معادلات بالا برای بدست آوردن این مجهولات کافی نبوده و از قانون تراکم ناپذیری مایع نیز می‌توان به عنوان معادله اضافی استفاده نمود:

مشابه فاز مایع، برای فاز جامد نیز می‌توان معادلات را باز نویسی نمود:

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s v_s) = 0 \qquad (۱۰ \qquad \text{و} \qquad \nabla \cdot \sigma_s = 0 \qquad (۱۱$$

$$\frac{\partial \rho_s h_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s v_s h_s) = \nabla \cdot (K_s \nabla T_s) \qquad (۱۲ \qquad \text{و} \qquad \nabla \cdot v_s = 0 \qquad (۱۳$$

معادله (۱۳) برای فاز جامد نیاز نیست چرا که تعداد مجهولات فاز جامد عبارتند از: چگالی، سه مؤلفه سرعت و درجه حرارت. فشار در فاز جامد ایجاد نمی‌گردد به همین دلیل این معادله اضافی است.

[Downloaded from ijcse.ir on 2026-11-15]

[DOR: 20.1001.1.23222352.1393.3.1.1.7]

$$\rho_s(v_s - w)\cdot n_{sl} = 0 \qquad (۱۴ \quad \text{و} \quad \rho_l(v_l - w)\cdot n_{ls} = 0 \qquad (۱۵$$

که در آن n بردار عمود بر سطح مشترک دو فاز و در جهت بیرون پارامتر دوم و w مقدار سرعت سطح مشترک است.
با توجه به قانون بقاء ممنتوم خطی می‌توان نوشت:

$$\sigma_l\cdot n_{ls} + \sigma_s\cdot n_{sl} = 0 \quad (۱۶ \qquad \text{و} \qquad (K_l\nabla T_l)\cdot n_{ls} + (K_s\nabla T_s)\cdot n_{sl} = 0 \quad (۱۷$$

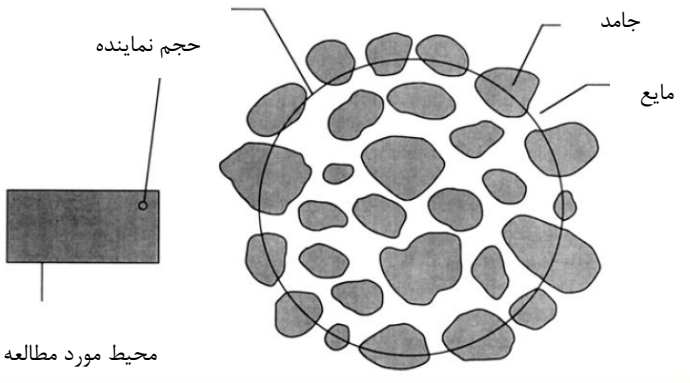
رابطه ۱۷از پیوستگی شار جرم در سطح بین دو فاز نتیجه می‌شود که به دلیل توزیع غیر یکنواخت فازها توصیف رفتار بین فازها عملی نبوده و حل عددی معادلات فوق غیر ممکن است. برای غلبه بر این مشکل از تکنیک همگن‌سازی معادلات برای دو فاز جامد و مایع استفاده می‌شود. همگن‌سازی معادلات با روش میانگین حجمی انجام شده است.

۴- همگن‌سازی به روش میانگین حجمی

انتقال جرم و انتقال حرارت باید در مقیاس میکرو صورت گیرند. اما معادلات انتقال را نمی‌توان در مقیاس میکرو حل کرد. چون هندسه محیط متخلخل و توزیع فازها را یا نمی‌توان مشاهده کرد و یا هندسه پیچیده‌ای را به همراه خواهند داشت. با روش میانگین حجم معادلات در مقیاس میکروسکوپیک به معادلات در مقیاس REV[1] تبدیل خواهند شد. روش میانگین حجمی براساس یکپارچه سازی همه معادلات فوق بر روی یک المان حجم نماینده (REV) از حجم گسترده می‌باشد [۲۴]. این روش اجازه انتقال معادلات را از مقیاس میکرو به مقیاس ماکرو می‌دهد. هر کمیت فیزیکی ψ_α (اسکالر، برداری، تانسور) در مقیاس میکرو بعد از تبدیل به مقیاس ماکرو را می‌توان یا به صورت فاز میانگین حجم $\overline{\psi}_\alpha$ و یا به صورت فاز میانگین ذاتی[2] $\overline{\psi}_\alpha^{\alpha}$ با روابط زیر تبدیل نمود:[۲۴]

$$\overline{\psi}_\alpha = \frac{1}{V}\int_{V_\alpha}\psi_\alpha dV \quad \text{و} \quad \overline{\psi}_\alpha^{\alpha} = \frac{1}{V_\alpha}\int_{V_\alpha}\psi_\alpha dV \qquad \text{و} \qquad V = \sum V_i$$

که α می تواند برای فاز جامد (s) و یا فاز مایع (l) را به خود اختصاص دهد. در مقیاس ماکرو توصیف ترکیب فازها با جزء حجمی صورت می‌گیرد:



شکل ۲- حجم نماینده در یک محیط متخلخل [۲۲]

[1] Representative Elementary Volume
[2] Phase intrinsic average

[Downloaded from ijcse.ir on 2026-11-15]
[DOR: 20.1001.1.23222352.1393.3.1.1.7]

$$\alpha = s, l \quad \varepsilon_\alpha = \frac{V_\alpha}{V} \text{ حجم جزئی فاز:} \varepsilon_i \quad \text{و} \quad i \quad \text{و} \quad \sum \varepsilon_i = 1$$

در فرضیات بیان شد که محیط همواره اشباع باقی می‌ماند و هیچ‌گونه گازی در طی فرآیند ایجاد نمی‌شود و محیط همـواره از دو فاز مایع و جامد تشکیل شده است:

$$\overline{\psi}_\alpha = \varepsilon_\alpha \overline{\psi}_\alpha^\alpha \qquad \varepsilon_s + \varepsilon_l = 1 \quad (۱۸)$$

با استفاده از تئوری روش متوسط‌های حجمی که در بالا ذکر شد، برای فاز جامد می‌توان نوشت: [۲۳]

$$\frac{\partial \overline{\rho_s}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\overline{\rho_s}\overline{v_s^s}\right) = 0 \quad (۱۹ \qquad \nabla \cdot \overline{\sigma_s} + \frac{1}{V}\int_{A_{sl}} \overline{\sigma_s} \,.\, n_{sl} dA = 0 \quad (۲۰$$

$$\frac{\overline{\partial \rho_s h_s}}{\partial t} + \nabla . \left(\overline{\rho_s v_s^s h_s^s}\right) = \nabla . \left(K_s(\nabla \overline{T_s} + \frac{1}{V}\int_{A_{sl}} \overline{T_s} \,.\, n_{sl} dA\right) = -\rho_s^s \overline{\widetilde{h_s}\widetilde{v_s}} + \frac{1}{V}\int_{A_{sl}} K_s \nabla \overline{T_s} \cdot n_{sl} dA \quad (۲۱$$

و متناظر با آن برای فاز مایع نیز روابط زیر نتیجه خواهد شد:[۲۳]

$$\frac{\partial \overline{\rho_l}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\overline{\rho_l}\overline{v_l^l}\right) = 0 \quad (۲۲ \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_l} + \frac{1}{V}\int_{A_{sl}} \overline{\sigma_l} \cdot n_{ls} dA \qquad (۲۳$$

$$\nabla \cdot \overline{\sigma_l} + \frac{1}{V}\int_{A_{sl}} \overline{\sigma_l} \cdot n_{ls} dA \qquad (۲۴$$

$$\frac{\overline{\partial \rho_l h_l}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\overline{\rho_l} \overline{v_l^l h_l^l}\right) = \nabla \cdot \left(K_l(\nabla \overline{T_l} + \frac{1}{V}\int_{A_{ls}} \overline{T_l} \cdot n_{ls} dA\right) - (\rho_l^l \overline{\widetilde{h_l}\widetilde{v_l}}) + \frac{1}{V}\int_{A_{ls}} K_l \nabla \overline{T_l} \cdot n_{ls} \quad (۲۵$$

از تعادل ترمودینامیکی و بقای انرژی نتیجه گرفته می‌شود که دمای قطعه همواره برای هر دو جزء مایع و جامـد برابـر بـا دمـای حباب تر است[۲۲]. (دمای حباب تر بصورت تجربی توسط نویسنده اندازه گرفته شده است)

با این فرض و شرایط مرزی که آورده شد می‌توان مجموع معادلات ۲۱ و ۲۵ را به صورت رابطه ۲۶ نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho_s}\overline{h_s} + \overline{\rho_l}\overline{h_l}\right) + \nabla \cdot \left(\overline{\rho_s}\overline{v_s^s h_s^s} + \overline{\rho_l}\overline{v_l^l h_l^l}\right) = \nabla \cdot (K^{eff} \nabla \overline{T}) \quad (۲۶$$

که در آن K^{eff} تانسور رسانایی موثر است که از کارهای مشابه [۳] استفاده شده است.

۴-۱- فرمول‌بندی جدید انتقال جرم

با معرفی کسر حجمی (ε) برای هر دو معادله بقای جرم می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \varepsilon_l \overline{\rho_l^l}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\overline{\rho_l^l}\overline{v_l}\right) = 0 \qquad (۲۷$$

با جایگذاری معادله تراکم ناپذیری در معادله ۲۷، می‌توان آن را به صورت رابطه (۲۸) تبدیل نمود:

$$\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{v_l}) = 0 \qquad (۲۸$$

با همین استدلال می‌توان برای فاز جامد نیز معادله بقای جرم را نوشت:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{v_s}) = 0 \qquad (۲۹$$

حاصل جمع دو معادله رابطه (۳۰) را خواهد داد:

[Downloaded from ijcse.ir on 2026-11-15]

[DOR: 20.1001.1.23222352.1393.3.1.1.7]

$$\frac{\partial(\varepsilon_s+\varepsilon_l)}{\partial t}+\nabla\cdot(\overline{v_s}+\overline{v_l})=0 \qquad (۳۰$$

از رابطه (۱۸) سمت چپ این معادله حذف شده و حاصل رابطه (۳۱) باقی خواهد ماند:

$$\nabla\cdot(\overline{v_s}+\overline{v_l})=0 \qquad (۳۱$$

قانون عمومی دارسی عبارت است از:

$$\overline{v_l^l}=\overline{v_s^s}-\frac{\underline{k}}{\varepsilon_l\mu_l}\cdot(\nabla\overline{P_l^l}-\overline{\rho_l^l}g) \qquad (۳۲$$

با ضرب طرفین معادله در جزء حجمی مایع ε_l و نادیده گرفتن اثرات جاذبه، رابطه (۳۳) حاصل می‌گردد:

$$\overline{v_l}=-\frac{1}{\mu_l}\underline{K}\cdot\nabla\overline{p_l^l}+\varepsilon_l\overline{v_s^s} \qquad (۳۳$$

و با جمع کردن طرفین معادله فوق با $\overline{v_s}+\overline{v_l}$ می‌توان حاصل را بدست آورد:

$$\overline{v_s}+\overline{v_l}=\varepsilon_s\overline{v_s^s}+\varepsilon_l\overline{v_s^s}-\frac{\underline{k}}{\mu_l}\cdot\nabla\overline{P_l^l}=\overline{v_s^s}-\frac{\underline{k}}{\mu_l}\cdot\nabla\overline{P_l^l} \qquad (۳۴$$

و با قرار دادن طرف راست معادله (۳۴) در معادله (۳۱) می‌توان به شکل دیگری از اولین قانون بقا دست یافت:

$$\nabla\cdot\left(\overline{v_s^s}-\frac{\underline{k}}{\mu_l}\cdot\nabla\overline{P_l^l}\right)=0 \qquad (۳۵$$

که به کمک این رابطه می‌توان مقدار فشار مایع را بدست آورد. دومین معادله بقا از معادلات (۲۸) و (۳۵) حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial\varepsilon_l}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\varepsilon_l\overline{v_s^s}-\frac{\underline{k}}{\mu_l}\cdot\nabla\overline{P_l^l}\right)=0 \qquad (۳۶$$

مقدار رطوبت در طی فرآیند را می‌توان توسط رابطه (۳۷) از مقدار جزء حجمی اقتباس کرد [۲۵]:

$$W=\frac{\varepsilon_l\overline{\rho_l^l}}{(1-\varepsilon_l)\overline{\rho_s^s}} \qquad (۳۷$$

۴-۲- بقای انرژی

با توجه به روابط انتقال حرارت، معادلات بقای انرژی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\overline{\rho c_p}\frac{\partial\overline{T}}{\partial t}-\nabla\cdot\left(K\cdot\nabla\overline{T}\right)=0 \qquad (۳۸$$

$$\overline{\rho c_p}=\overline{\rho_s}c_{p_s}+\overline{\rho_l}c_{p_l} \qquad (۳۹$$

۴-۳- تعادل مکانیکی و تنش موثر

مجموع معادله (۸) و (۱۳) معادله تعادل مکانیکی۴۰ را تشکیل می‌دهد:

$$\nabla\cdot(\sigma)=0 \qquad (۴۰$$

می‌توان با استفاده از تئوری بایوت تنش کلی را به دو قسمت تقسیم بندی نمود که قسمت اول تنش ناشی از رفتار استاتیکی جامد و قسمت دوم تنش‌های ناشی از فشار سیال است.

[Downloaded from ijcse.ir on 2026-11-15]

[DOR: 20.1001.1.23222352.1393.3.1.1.7]

$$\sigma = \varepsilon_s \sigma_s - \varepsilon_l \overline{P_l^l} I \qquad (۴۱$$

تنش موثر از حاصل جمع تنش کلی و فشار مایع معرفی می‌شود.

$$\sigma^{eff} = \sigma + P_l^l I \qquad (۴۲$$

می‌توان بقای ممنتوم را با توجه به رفتار الاستیک به صورت رابطه (۴۳) نوشت:

$$\nabla \cdot \left(\lambda \cdot \mathrm{tr}(\varepsilon) I + 2 \cdot \mu\varepsilon - \overline{P_l^l} I\right) = 0 \qquad (۴۳$$

و تانسور کرنش را به صورت تابعی از جابجایی‌ها تعریف نمود:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[(\nabla u) + (\nabla u)^t + (\nabla u)^t \cdot (\nabla u)] \qquad (۴۴$$

معادلات (۳۸) تا (۴۴) فرآیندهای انتقال جرم، حرارت و ممنتوم را برای محیط متخلخل بازگو می‌کنند و با حل این معادلات می‌توان تنش‌های ناشی از خشک شدن و انقباض خشک شدن را محاسبه نمود.

۵- آزمایشات تجربی

با استفاده از آزمایشات تجربی می‌توان مدت زمان خشک شدن، سرعت جابجایی و مقدار انقباضات نقاط مختلف قطعه را بدست آورد [۲۵]. مقادیر حاصل شده را می‌توان با نتایج خروجی مدل مقایسه نمود و صحت عملکرد مدل و یا مقدار خطای ایجاد شده آن را محاسبه کرد. بدین منظور خشک کردن گل خاک رس در سه درجه حرارت ۳۵، ۵۵ و ۷۵ درجه سانتی‌گراد انجام و در طی بازه‌های زمانی قطعه وزن شده تا بتوان نمودار خشک شدن تجربی را بدست آورد. همچنین مقادیر کاهش حجم قطعه نیز به دلیل حذف رطوبت به صورت مکانیکی اندازه‌گیری شد و مقادیر حد انقباض و نیز سرعت حرکت ماده از اطلاعات فوق محاسبه گردید [۲۵]. از آنجا که محاسبه همه پارامترهای مورد نیاز مدل (مدول یانگ، مدول بالک و ضریب هدایت حرارت) به صورت تجربی وقت‌گیر و هزینه بر بود به ناچار مجبور به استفاده از مقادیر تجربی حاصل شده توسط محققان در سایر تحقیقات استفاده شد. پارامترهای مورد نیاز جهت حل معادلات نهایی در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱- پارامترها و مقادیر استفاده شده در مدل سازی

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
مدول بالک	2.6 Mpa	تخلخل اولیه	
هدایت گرمایی	$\lambda_s = 1.44\ \mathrm{Jm^{-2}k^{-1}\ s^{-1}}$	نفوذ پذیری	$k=10^{-11}\mathrm{m^2\ s^{-1}}$
چگالی مایع	$\rho_l = 1000\mathrm{kg\ m^{-3}}$	چگالی جامد	$\rho_s = 2610\ \mathrm{kgm^{-3}}$
ضریب نفوذ	$D = 1.554\ e\ -8\mathrm{m^2\ s^{-1}}$	ضریب گرمایی ویژه	$C_p=1900\mathrm{Jkg^{-1}.C^{-1}}$

جهت محاسبه مقدار رطوبت قطعه، قطعه را در بازه‌های زمانی مختلف وزن کرده و اختلاف آن را با مقدار جرم ماده اولیه محاسبه و در نهایت درصد رطوبت آن بر اساس معیار خشک در هر لحظه حاصل می‌گردد. با حل معادلات بقا نیز می‌توان درصد رطوبت

[Downloaded from ijcse.ir on 2026-11-15]

[DOR: 20.1001.1.23222352.1393.3.1.1.7]

ناشی از مدل را محاسبه نمود. کاهش حجم با استفاده از پردازش تصویر و ۲ دوربین محاسبه گردید. کاهش جرم نیز با استفاده از ترازوی با دقت ۰/۰۱ گرم با اتصال به کامپیوتر کنترل شد. [۲۵]. بازه‌های ثبت تصویر و جرم ۵ دقیقه یک بار انتخاب شد. جهت انجام آزمایشات خشک کنی توسط محقق ساخته شده است که دو جداره بوده و مکانیزم انتقال حرارت در آن از نوع جابجایی است. در شکل ۳ خشک کن و تجهیزات آورده شده است.

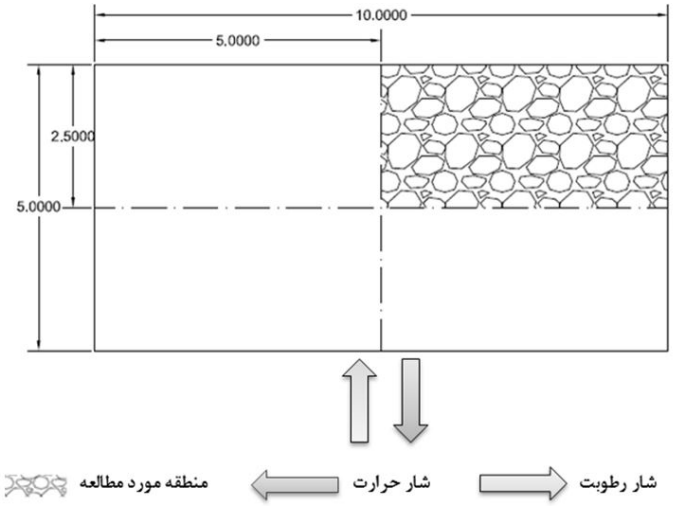


شکل ۳- خشک کن و تجهیزات مورد استفاده

۶- روش حل عددی

پیچیدگی معادلات حاکم بر مسئله، تاثیر متغیرهای فیزیکی مختلف، گذرا بودن و بالا بودن هزینه‌های مربوط به تجهیزات آزمایشگاهی و محدودیت استفاده از دستگاه‌های اندازه‌گیری، آزمایشات تجربی را در مقایسه با روش‌های عددی محدود می‌کنند. به همین دلیل روش‌های عددی در عصر حاضر رشد چشم‌گیری داشته است.

شکل ۴ ابعاد نمونه مورد نظر را نشان می دهد که به خاطر تقارن و کاهش زمان حل، تنها یک چهارم قطعه مدل شده است.



شکل ۴- هندسه قطعه و اعمال حرارت بر آن و خروج رطوبت

[Downloaded from ijcse.ir on 2026-11-15]

[DOR: 20.1001.1.23222352.1393.3.1.1.7]

۶-۱- شرایط مرزی

برای سطوح آدیاباتیک (سطوح تقارن قطعه) که هیچ عمل انتقال صورت نمی‌گیرد:

$$\nabla \overline{P_l^l} = 0 \quad (۴۵ \qquad \left(-K\nabla\overline{T}\right)\cdot n = 0 \quad (۴۶$$

برای سطح بالایی (x=5 , y=2.5)که در معرض انتقال حرارت و شار رطوبتی قرار دارند شرایط مرزی عبارتست از:

$$\left(-\frac{k}{\mu_l}.\nabla\overline{P_l^l}\right)\cdot n = \frac{F_m}{\rho_l^l} \quad (۴۷ \left(-K.\nabla\overline{T}\right)\cdot n = -\dot{m}h_v + h_c(T_e - T_\infty) \quad (۴۸$$

$$\sigma \cdot n = 0 \quad (۴۹ \qquad F_m = h_m\rho_g(C_{sat} - C_\infty) \quad (۵۰$$

$$\dot{m} = \frac{h_m M_v}{RT_a}\left(P_{v,surf} - P_{v,a}\right) \quad (۵۱ \qquad h_m = \frac{h_c}{\rho_{air}Cp_{air}} \quad (۵۲$$

$$h_c = \frac{K\,Nu}{d_h} \quad (۵۳ \qquad \overline{Nu_L} = (0.825 + \frac{0.387\times Ra_L^{1/6}}{\left(1+\left(\frac{0.492}{Pr}\right)^{9/16}\right)^{8/27}}) \quad (۵۴$$

جهت ساده‌تر شدن مسئله مدل‌سازی با فرض همواره اشباع بودن مخلوط ۲ فازی انجام شده است، یعنی تنها انقباض تا نقطه بحرانی اتفاق می‌افتد. معادلات بقای فوق به کمک پارامترهای جدول ۱ در نرم‌افزار اجزاء محدود آباکوس و با استفاده از سابروتین و کد نویسی در نرم‌افزار پایتون انجام و نتایج حل با نتایج آزمایشات تجربی مقایسه شده‌اند. بدین منظور از المان انتقال حرارت و ۴ گرهی با شماره DC2D4 استفاده شده است.

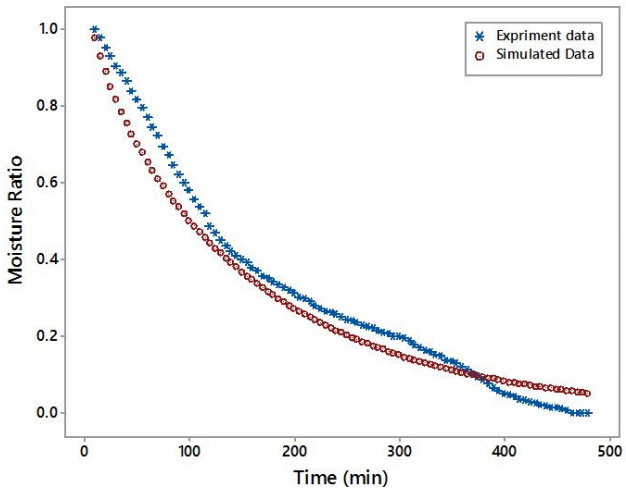
۷- نتایج و بحث

۷-۱- مقایسه مقادیر تجربی و مدل سازی

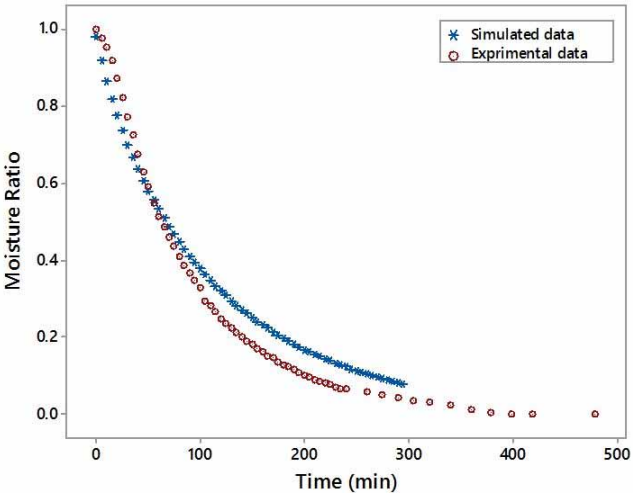
در شکل‌های ۵ تا ۷ مقادیر مدل‌سازی شده کاهش رطوبت با مقادیر تجربی متناظر با آن، برای درجه حرارت‌های مختلف آورده شده است. در طول فرآیند خشک شدن، چنانچه خاک اشباع باشد، ابتدا تخلخل‌های بزرگ خشک می‌شوند. در نتیجه سطح میانی آب و هوا به سطح ذرات نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. حاصل این نزدیک شدن ذرات، کاهش تدریجی پیوستگی مایع است که منجر به کاهش سرعت خشک شدن شده و پایان مرحله اول را به دنبال دارد سرعت خشک شدن در مرحله اول ثابت است و آب با نرخی مشخص از سطوح قطعه تبخیر می‌شود. با کاهش درجه اشباع، لوله‌های موئین جریان شکسته می‌شوند و رطوبت تنها از طریق لایه‌های نازک اطراف ذرات حرکت می‌کند در این حالت پیوستگی بخار اتفاق می‌افتد. سرعت خشک شدن ثابت نیست و مرحله دوم خشک شدن شروع می‌شود. در این شکل‌ها دو مرحله خشک شدن مشخص هستند. توجیه منحنی خشک شدن ارتباط نزدیکی با پدیده انتقال حرارت و جرم دارد. قبل از خشک کردن، سطح قطعه کاملا از لایه نازکی از آب پوشیده شده که بصورت آب غیر پیوندی است. با برقرار کردن تماس بین سطح قطعه و هوای خشک‌کننده تبخیر اتفاق می‌افتد. با در نظر گرفتن مقاومت در برابر انتقال جرم مشخص است که شرایط خارجی و لایه مرزی گاز، کننده سرعت خشک کردن را محدود می‌کنند.

[Downloaded from ijcse.ir on 2026-11-15]

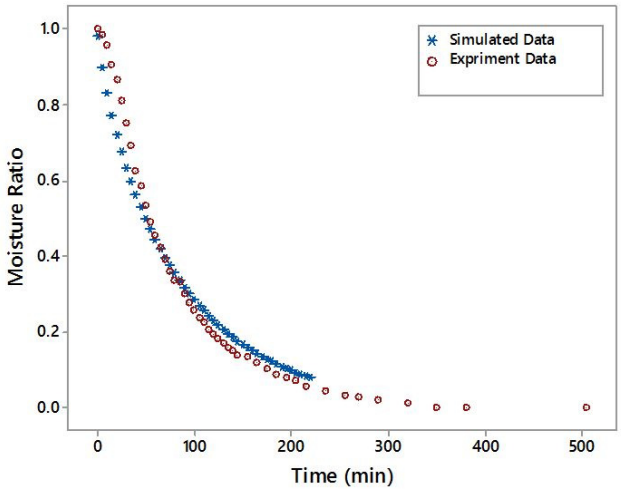
[DOR: 20.1001.1.23222352.1393.3.1.1.7]



شکل ۵- مقایسه مقادیر مدل با مقادیر تجربی برای خشک شدن در ۳۵ درجه سانتی‌گراد



شکل ۶- مقایسه مقادیر مدل با مقادیر تجربی برای خشک شدن در ۵۵ درجه سانتی‌گراد

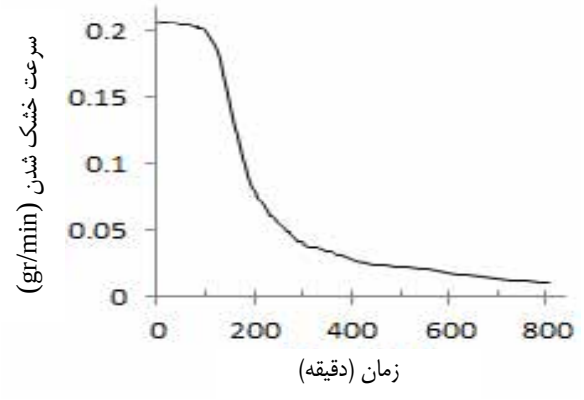


شکل ۷- مقایسه مقادیر مدل با مقادیر تجربی برای خشک شدن در ۷۵ درجه سانتی‌گراد

[Downloaded from ijcse.ir on 2026-11-15]

[DOR: 20.1001.1.23222352.1393.3.1.1.7]

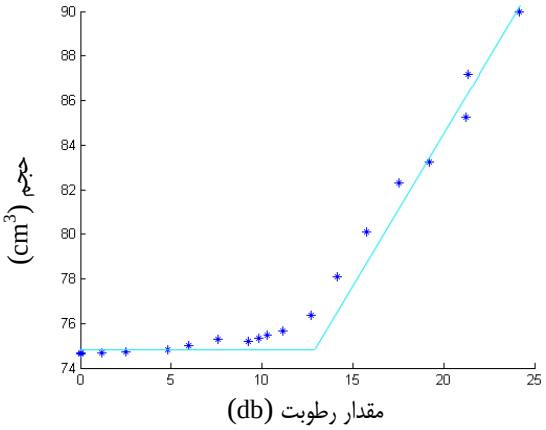
به همین دلیل در شروع فرآیند سرعت خشک شدن ثابت و با ادامه آن روندی کاهشی دارد. شکل ۸ نمودار سرعت خشک شدن (تبخیر) را نشان می‌دهد. این نمودار به صورت تجربی و در دمای ۳۵ درجه حاصل شد.



شکل ۸- تغییرات سرعت خشک شدن در دمای ۳۵ درجه

۷-۲- انقباض و تنش خشک کردن

مقدار کاهش حجم (انقباض) با استفاده از ترسیم نمودار حجم در برابر رطوبت برای یک نمونه در دمای ۳۵ درجه در شکل ۹ نشان داده شده است.



شکل ۹- نمودار حجم- رطوبت در درجه حرارت ۳۵ درجه

در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ مقدار انقباض خشک کردن و بردارهای کرنش، با مقایسه تصویر ابتدا و انتهای قطعه آورده شده است. اختلاف فاز در خشک شدن (بین سطح و عمق) سبب انقباض بیشتر سطح نسبت به عمق می‌شود به عبارت دیگر مدل در سطح به علت از دست دادن رطوبت تمایل به کوچک شدن دارد اما در عمق، مدل به دلیل از دست دادن رطوبت کمتر نسبت به سطح و حضور نیروهای موئینگی انقباض کمتری دارد و این اصلی‌ترین عامل برای ایجاد تنش‌های کششی در سطح و وقوع ترک در طول فرآیند خشک شدن است و بایست با انتخاب شرایط محیطی مناسب و پارامترهای فرآیند، ایجاد ترک را کنترل نمود. شکل ۶ نمونه‌ای از ترک ایجاد شده قطعه در درجه حرارت ۵۵ درجه سانتی‌گراد را نشان می‌دهد.

[Downloaded from ijcse.ir on 2026-11-15]

[DOR: 20.1001.1.23222352.1393.3.1.1.7]