

مدل سازی فرآیند خشک شدن مخلوط اشباع خاک رس و انقباض قطعه در طی فرآیند

خلیل خلیلی، سید یوسف احمدی بروغنی، محسن باقریان

دانشگاه بیرجند

M.bagherian@gmail.com

چکیده: در طی خشک شدن سرامیکها به خاطر وجود گرادیانهای رطوبت، حرارت و فشار، تنشهایی در قطعه ایجاد می شود. ایجاد و گسترش مدلی جهت توصیف فرآیند خشک کردن محیطهای متخلخل و بررسی اثرات ناشی از آن شامل تنشها و انقباضات ضروری است. در این تحقیق با در نظرگیری همزمان فرآیندهای انتقال حرارت، انتقال جرم، انتقال ممنتوم و تاثیر انقباضات، مدلی جهت ارزیابی تنشها و انقباض ناشی از خشک شدن مخلوط اشباع خاک رس و آب به کمک اجزاء محدود ارائه شده است. با استفاده از معادلات بقای ممنتوم، تغییر شکلها و تنشها برای هر فاز محاسبه شده است. در این مدل فرض شده است. با استفاده از معادلات بقای ممنتوم، تغییر شکلها و تنشها برای هر فاز محاسبه شده است. در این مدل فرض شده است که در مرحله اول خشک شدن، حرکت آب از داخل قطعه به سطح آن توسط قانون دارسی انجام می شود و نیروی لازم جهت این انتقال به کمک گرادیان فشار تامین می گردد. آزمایشات تجربی جهت محاسبه پارامترهای مورد نیاز مدل انجام شد. مدل به کمک اجزاء محدود حل و نتایج با منحنیهای خشک شدن حاصل از آزمایشات تجربی مقایسه گردید. در این تحقیق مشخص شد که عامل اصلی انتقال رطوبت از نظر فیزیکی گرادیان فشار منافذ است.

۱– مقدمه

مدلسازی فرآیند خشک کردن سرامیکها در توسعه فرآیند و بهبود محصولات سرامیکی جایگاه ویژهای پیدا کرده است. معادلات مشتقات جزئی مبنای مدلسازی فرآیند خشک کردن بوده و بایستی در طی پروسه، معادلات مشتقات جزئی چند فیزیکه (پدیدههای انتقال) در سیستم با گذشت زمان به صورت همزمان حل شوند. در نظر گیری همه مکانیزمهای انتقال در فرآیند خشک کردن، منجر به غیرقابل حل شدن معادلات به طور همزمان خواهد شد. مدل سازی محققان جهت غلبه بر این مشکل اثرات مکانیزمهای مختلف را بر روی ضریب نفوذ اعمال میکنند که در نتیجه ضریب نفوذ به ضریب نفوذ موثر تبدیل میشود. شرود و لوئیس اولین افرادی بودند که در سال ۱۹۲۹ در ایجاد مدل ریاضی خشک کردن با استفاده از معادله حرارت فوریه پیش قدم بودند[۱]. در این مدل، درجه حرارت و ضریب نفوذ حرارتی به ترتیب با رطوبت و ضریب نفوذ آن جایگزین شد. (معادله ۱)

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{D}\nabla^2 \mathbf{X} \tag{1}$$

در انتهای سال ۱۹۳۰ محققان نشان دادند که توزیع رطوبت نمیتواند تنها از قانون فیک حاصل شود و عواملی نظیر فشار، نیروی مویینگی، جابجایی تبخیر و… بر آن تاثیر گذار بوده و رابطه ۱ به صورت زیر اصلاح گردید [۲،۳].

(۲

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{t}} = \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla \mathbf{X})$$

ویتاکر نشان داد که انتقال رطوبت توسط جابجایی را نمیتوان در این عامل قرار داد و در طی نتایج حاصل از آزمایشات، وی ضریب نفوذ ثابت رطوبت را به صورت تابعی از درجه حرارت و رطوبت بدست آورد [۴،۵]. مدل ویتاکر به خوبی پدیدههای فیزیکی که در خشک شدن اتفاق میافتند را بیان میکرد. اما با این وجود معایبی نیز به همراه داشت. بعد از ویتاکر، لیوکو[۶] فرض نمود که شار رطوبت از سه جزء تشکیل شده است: (معادله ۳)

$$\dot{\mathbf{m}_{m}} = -\rho_{s}\delta_{m}(\nabla \mathbf{X} + \delta_{T}\nabla \mathbf{T} + \delta_{P}\nabla \mathbf{P}) \tag{(7)}$$

کومانس [۷] آزمایشاتی طراحی کرد تا بصورت تجربی مقدار ضریب نفوذ را بدست آورد. کتالرز [۸] با در نظر گیری خواص الاستیک مقدار ضریب نفوذ را بدست آورد. آچانتا [۹] با استفاده از مخلوط اشباع ضریب نفوذه ای بالاتر را محاسبه و به مدل سازی انقباض خشک شدن پرداخت. زاگروبا و همکاران [۱۰] ضریب نفوذ را از منحنیهای تجربی خشک کردن محاسبه نمودند. مشابه همین تحقیق را مئوبی [۱۱] با لحاظ نمودن تغییر شکل قطعه انجام داد. چمخی و همکاران [۱۲] در راستای توسعه فرایند کرنش های ویسکو الاستیک را مدل نمودند. در این تحقیق با در نظرگیری همزمان فرآیندهای انتقال حرارت، انتقال جرم، انتقال ممنتوم و تاثیر انقباضات، مدلی با استفاده از قانون دارسی جهت ارزیابی تنشها و انقباض خشک شدن سرامیکها ارائه و در ادامه مدل به روش اجزاء محدود حل شده است. هدف از این تحقیق انتخاب بهترین شرایط عملیاتی و مناسبترین پارامترها جهت بدست آوردن محصولی با کیفیت و عاری از تنش و ترک است.

۲- سینتیک خشک کردن

خشک شدن با تبخیر مایع در اثر اعمال گرما به قطعهتر رخ میدهد که در ۲ مرحله جدا از هم را به دنبال دارد. مرحلهای که در قطعه انقباض ایجاد میشود و مرحلهای که بدون انقباض در قطعه است. در مرحله انقباضی (مرحله اول)، فاز گاز وجود نداشته و محیط متخلخل همواره به صورت دو فازی مایع و جامد میباشد. در بسیاری از موارد خشک شدن، ابتدا مقدار رطوبت X نسبت به زمان t، به صورت خطی تغییر نموده و سرعت خشک کردن ثابت است (شکل ۱).



شکل ۱ – سینتیک خشک کردن در مرحله اول و مرحله دوم [۱۹]

۶۶ جلد ۳ شمارهی ۱ بهار ۱۳۹۳

در ادامه رطوبت بصورت غیر خطی تا رسیدن به مقدار تعادلی *X کاهش یافته و سرعت خشک شدن تا رسیدن به مقدار صفر بصورت نزولی تغییر میکند.

۳- ۳- مدلسازی

طی فرآیند خشک کردن حجم قطعه متاثر از مقدار درصد رطوبت حین فرآیند است [۲۰،۲۱]. قانون دارسی با متغیرهای متوسط حجمی جریان مانند سرعت، فشار و دانسیته کار می کند. این مقدار متوسط کمیتها را میتوان در هر نقطه از فضای همگن به صورت "متوسط مقدار واقعی کمیت بر واحد حجم مشخص در بر گیرنده نقطه "تعریف کرد (شکل ۲). حجم در نظر گرفته شده باید به گونهای باشد که هم در مقابل ابعاد ماکروسکوپی مسئله کوچک باشد و هم شامل چندین سوراخ و اجزاء ماتریکس جامد باشد. بنابراین ضروری است تا قوانین انتقال اصلی برای مقیاس میکرو بر اساس نیروی مویینگی و حرکت مایع ارائه گردد. جهت حل معادلات در مقیاس میکرو درک هندسه مسئله ضروری است و این برای مواد متخلخل بسیار با توجه به تصادفی بودن نحوه قرارگیری ذرات و اندازه آنها، امکان مدل سازی واقعی هندسه عملا غیرممکن میباشد و بهتر است برای رفع این مشکل از روش متوسطهای حجمی استفاده شود، که در آن تبدیل معادلات از میکرو به ماکرو انجام میگیرد. بدین منظور ابتدا معادلات بقا برای هر جزء نوشته شده و معادلات ماکروسکوپیک از تبدیل معادلات از میکرو به ماکرو انجام میگیرد. بدین منظور ابتدا معادلات بقا برای هر جزء نوشته شده و معادلات ماکروسکوپیک از حجم نماینده این معادلات بقا حاصل میشود، معادله بقای ممنتوم کلی حاصل جمع معادله بقای ممنت و می خواهد بود. در نهایت قانون دارسی را می توان با قانون بقای ممنتوم مایع جایگزین نمود و به صورتهای دیگری از قانون بقای جرم دست یافت.

۳-۱- ۳-۱- فرضیات

در طی خشک شدن قطعات متخلخل فرآیندهای انتقال، همزمان رخ داده و منجر به پیچیده شدن مدل خواهد شد. بدین منظور فرضیات زیر جهت سادهشدن محاسبات در نظر گرفته شده است:

- محیط همواره دو فازی و اشباع باقی خواهد ماند.
 - ۲) خاک رس یک ماده متخلخل همگن است.
- ۳) شبیه سازی محدود به دوره خشک شدن با سرعت ثابت است.
 - ۴) اثرات جاذبه و جابجایی داخلی در نظر گرفته نشده است.
 - ۵) تبخیر فقط از سطح صورت می گیرد (به خاطر فرضیه اشباع)
 - ۶) فاز مایع و جامد تراکمناپذیر هستند.
- ۷) توزیع رطوبت و حرارت اولیه همگن است و هیچگونه تنش اولیه بر قطعه وارد نمی شود.

با توجه به فرض ۵ می توان نتیجه گرفت که نرخ تبخیر داخلی با نرخ تبخیر از سطح جامد به محیط برابـر اسـت و در نتیجـه آن مکانیزم انتقال رطوبت از اختلاف فشار هیدرواستاتیکی و قانون دارسی تبعیت می کند.

۲-۲- معادلات پیوستگی (مقیاس میکرو)

خواص فیزیکی سیال (چگالی، ویسکوزیته، فشار) به عنوان متوسطهای حجمی ذاتی نامیده می شوند که همانند یک حجم واحد

از حفرهها تعریف میشوند. بر اساس این تعریف، خواص پارامترهای فیزیکی حاصل میشود که میتوان آنها را به صورت تجربی بدست آورد. سرعتهای جریان به عنوان متوسطهای حجمی ظاهری توصیف میشوند، به این معنی که بر روی حجمهای واحد شامل حفرهها و ماتریسها متوسطگیری شده که این سرعتهای جریان را سرعتهای دارسی نامند. چنین توصیفی باعث میشود که میدان سرعت در مرزهای بین زیر حوزههای متخلخل و زیر حوزههای آزاد پیوسته باشد. به واسطه این توصیفها میتوان جریان را به وسیله یک سری از متغیرهای وابسته برای تمام زیر حوزههای متخلخل و جریان آزاد مدلسازی نمود. معادله دینامیکی توصیف کننده حرکت سیال را میتوان با استفاده از قانون دوم نیوتن برای یک ذره سیال بدست آورد. برای

$$\vec{F} = \frac{\vec{d\rho}}{dt}\vec{p} = \int \vec{V} \, dm \qquad \vec{dF} = dm \frac{\vec{dV}}{dt}$$
 (4)

با داشتن رابطهای برای شتاب یک المان سیال به جرم بینهایت کوچک، که در میدان جریان حرکت دارد می توان قانون دوم نیوتن را به شکل برداری نیز نوشت. معادلات کلاسیک انتقال حرارت، انتقال جرم و انتقال ممنتوم برای هر دو فاز جامد و مایع نوشته شده است که از اندیس s برای جامد و از 1 برای مایع استفاده شده است. معادله بقای جرم در فرم اویلری از رابطه (۵) برای مایع حاصل می شود:

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_l v_l) = 0 \tag{a}$$

معادله کلی ممنتوم خطی به صورت رابطه (۶) است [۲۲]:

$$i = l, s \quad j \neq i \quad \rho_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \cdot \nabla v_i \right) = \rho_i f_i + \nabla \cdot \underline{\sigma_i} + \sum_j P_{ij}$$
 (4)

ممنتوم زاویهای عبارت است از:

$$i = l, s \quad \underline{\sigma_i} = \underline{\sigma_i}^T \qquad \qquad \underline{\sigma_l} \equiv \sum_i (\underline{\sigma_i} - \rho_i u_i u_i) \qquad (1)$$

که u_i سرعت ناشی از جاذبه میباشد. با حذف اثرات جاذبه، معادله ممنتوم خطی به صورت رابطه (۸) تبدیل خواهد شد:

برای فاز مایع شش مجهول وجود دارد: چگالی، سه جزء سرعت، درجه حرارت و فشار مایع. معادلات بالا برای بدست آوردن این مجهولات کافی نبوده و از قانون تراکم ناپذیری مایع نیز میتوان به عنوان معادله اضافی استفاده نمود: مشابه فاز مایع، برای فاز جامد نیز میتوان معادلات را باز نویسی نمود:

$$\frac{\partial \rho_{s}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{s} v_{s}) = 0 \quad (1 \cdot \rho_{s} \cdot \sigma_{s}) = 0 \quad$$

معادله (۱۳) برای فاز جامد نیاز نیست چرا که تعداد مجهولات فاز جامد عبارتند از: چگالی، سـه مؤلفـه سـرعت و درجـه حـرارت. فشار در فاز جامد ایجاد نمی گردد به همین دلیل این معادله اضافی است.

$$\rho_{s}(v_{s} - w) \cdot n_{sl} = 0 \qquad (1)^{s} \rho_{l}(v_{l} - w) \cdot n_{ls} = 0 \qquad (1)^{s}$$

که در آن n بردار عمود بر سطح مشترک دو فاز و در جهت بیرون پارامتر دوم و w مقدار سرعت سطح مشترک است. با توجه به قانون بقاء ممنتوم خطی میتوان نوشت:

رابطه ۱۷از پیوستگی شار جرم در سطح بین دو فاز نتیجه می شود که به دلیل توزیع غیر یکنواخت فازها توصیف رفتار بین فازها عملی نبوده و حل عددی معادلات فوق غیر ممکن است. برای غلبه بر این مشکل از تکنیک همگن سازی معادلات برای دو فاز جامد و مایع استفاده می شود. همگن سازی معادلات با روش میانگین حجمی انجام شده است.

۴- همگنسازی به روش میانگین حجمی

انتقال جرم و انتقال حرارت باید در مقیاس میکرو صورت گیرند. اما معادلات انتقال را نمیتوان در مقیاس میکرو حل کرد. چون هندسه محیط متخلخل و توزیع فازها را یا نمیتوان مشاهده کرد و یا هندسه پیچیدهای را به همراه خواهند داشت. با روش میانگین حجم معادلات در مقیاس میکروسکوپیک به معادلات در مقیاس ⁽REV تبدیل خواهند شد. روش میانگین حجمی براساس یکپارچه سازی همه معادلات فوق بر روی یک المان حجم نماینده (REV) از حجم گسترده میباشد [۲۴]. این روش اجازه انتقال معادلات را از مقیاس میکرو به مقیاس ماکرو میدهد. هر کمیت فیزیکی μ_{α} (اسکالر، برداری، تانسور) در مقیاس میکرو بعد از تبدیل به مقیاس ماکرو را میتوان یا به صورت فاز میانگین حجم $\overline{\Psi}_{\alpha}$ و یا به صورت فاز میانگین ذاتی^۲ میار وابط زیر تبدیل نمود:[۲۴]

$$\overline{\Psi}_{\alpha} = \frac{1}{V} \int_{V_{\alpha}} \psi_{\alpha} dV \quad g \quad \overline{\Psi}_{\alpha} = \frac{1}{V_{\alpha}} \int_{V_{\alpha}} \psi_{\alpha} dV \quad g \quad V = \sum V_{i}$$

که α می تواند برای فاز جامد (s) و یا فاز مایع (l) را به خود اختصاص دهد. در مقیـاس مـاکرو توصـیف ترکیـب فازهـا بـا جـزء حجمی صورت میگیرد:



شکل ۲- حجم نماینده در یک محیط متخلخل [۲۲]

² Phase intrinsic average

¹ Representative Elementary Volume

$$lpha = {
m s}, {
m l} \quad arepsilon_{lpha} = rac{{
m V}_{lpha}}{{
m V}}arepsilon_{
m i};$$
و i و حجم جزئی فاز $arepsilon_i = arepsilon_i$

در فرضیات بیان شد که محیط همواره اشباع باقی میماند و هیچگونه گازی در طی فرآیند ایجاد نمیشود و محیط هم واره از دو فاز مایع و جامد تشکیل شده است:

$$\varepsilon_{\rm s} + \varepsilon_{\rm l} = 1$$
 (1A) $\psi_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha} \overline{\psi}_{\alpha}^{\alpha}$

با استفاده از تئوری روش متوسطهای حجمی که در بالا ذکر شد، برای فاز جامد می توان نوشت: [۲۳]

$$\frac{\partial \overline{\rho_s}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\overline{\rho_s} \overline{v_s^S}\right) = 0 \quad (\aleph \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_s} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_s} \cdot n_{sl} dA = 0 \quad (\Upsilon \cdot \overline{\sigma_s} + \nabla \cdot \overline{\sigma_s} + \nabla \cdot \overline{\sigma_s} + \nabla \cdot \overline{\sigma_s} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_s} \cdot n_{sl} dA = 0 \quad (\Upsilon \cdot \overline{\sigma_s} - \overline{\sigma_s} + \nabla \cdot \overline{\sigma_s} + \nabla \overline{\sigma_s} + \nabla \cdot \overline{\sigma_s} + \nabla \cdot \overline{\sigma_s} + \nabla \cdot \overline{\sigma_s} + \nabla \cdot \overline{\sigma_s} + \nabla \overline{\sigma_s} + \nabla \cdot \overline{\sigma_s} + \nabla \cdot \overline{\sigma_s} + \nabla \overline{\sigma_s} +$$

و متناظر با أن برای فاز مایع نیز روابط زیر نتیجه خواهد شد:[۲۳]

$$\frac{\partial \overline{\rho_{l}}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\overline{\rho_{l}} \overline{v_{l}^{l}}\right) = 0 \quad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA \qquad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA \qquad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA \qquad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA \qquad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA \qquad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA \qquad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA \qquad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA \qquad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA \qquad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA \qquad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA \qquad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA \qquad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA \qquad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA \qquad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA \qquad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA \qquad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA \qquad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA \qquad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA \qquad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA \qquad (\forall \forall \quad \nabla \cdot \overline{\sigma_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{sl}} \overline{\sigma_{l}} \cdot n_{ls} dA)$$

$$\frac{\overline{\partial \rho_{l} h_{l}}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\overline{\rho_{l}} \overline{v_{l}^{l} h_{l}^{l}}\right) = \nabla \cdot \left(K_{l} (\nabla \overline{T_{l}} + \frac{1}{V} \int_{A_{ls}} \overline{T_{l}} \cdot n_{ls} dA\right) - (\rho_{l}^{l} \overline{\widetilde{h_{l}}} \widetilde{v_{l}}) + \frac{1}{V} \int_{A_{ls}} K_{l} \nabla \overline{T_{l}} \cdot n_{ls}$$
(Y2)

از تعادل ترمودینامیکی و بقای انرژی نتیجه گرفته می شود که دمای قطعه همواره برای هر دو جزء مایع و جامد برابر با دمای حباب تر است[۲۲]. (دمای حباب تر بصورت تجربی توسط نویسنده اندازه گرفته شده است) با این فرض و شرایط مرزی که آورده شد می توان مجموع معادلات ۲۱ و ۲۵ را به صورت رابطه ۲۶ نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\rho_s} \overline{h_s} + \overline{\rho_l} \overline{h_l} \right) + \nabla \cdot \left(\overline{\rho_s} \overline{v_s^s h_s^s} + \overline{\rho_l} \overline{v_l^l h_l^l} \right) = \nabla \cdot \left(K^{eff} \overline{\nabla T} \right) \quad (\nabla P_{ij})$$

که در آن K^{eff} تانسور رسانایی موثر است که از کارهای مشابه [۳] استفاده شده است.

۴-۱- فرمول بندی جدید انتقال جرم

با معرفی کسر حجمی (٤) برای هر دو معادله بقای جرم میتوان نوشت:

$$\frac{\partial \varepsilon_{l} \overline{\rho_{l}^{l}}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\overline{\rho_{l}^{l}} \overline{v_{l}}\right) = 0 \tag{YV}$$

با جایگذاری معادله تراکم ناپذیری در معادله ۲۷، می توان آن را به صورت رابطه (۲۸) تبدیل نمود:

$$\frac{\partial \varepsilon_{l}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{v_{l}}) = 0 \tag{YA}$$

با همین استدلال می توان برای فاز جامد نیز معادله بقای جرم را نوشت:

$$\frac{\partial \varepsilon_{\rm s}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{v_{\rm s}}) = 0 \tag{19}$$

حاصل جمع دو معادله رابطه (۳۰) را خواهد داد:

 $\frac{\partial(\epsilon_{s}+\epsilon_{l})}{\partial t}+\nabla\cdot(\overline{v_{s}}+\overline{v_{l}})=0 \tag{7}$

از رابطه (۱۸) سمت چپ این معادله حذف شده و حاصل رابطه (۳۱) باقی خواهد ماند:

$$\nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}_{s}} + \overline{\mathbf{v}_{l}}) = 0 \tag{7}$$

قانون عمومی دارسی عبارت است از:

$$\overline{v_{l}^{l}} = \overline{v_{s}^{s}} - \frac{\underline{k}}{\varepsilon_{l}\mu_{l}} \cdot (\nabla \overline{P_{l}^{l}} - \overline{\rho_{l}^{l}}g)$$
(77)

با ضرب طرفین معادله در جزء حجمی مایع ${\cal E}_l$ و نادیده گرفتن اثرات جاذبه، رابطه (۳۳) حاصل میگردد:

$$\overline{\mathbf{v}_{l}} = -\frac{1}{\mu_{l}} \underline{K} \cdot \nabla \overline{\mathbf{p}_{l}^{l}} + \varepsilon_{l} \overline{\mathbf{v}_{s}^{s}} \tag{W}$$

و با جمع کردن طرفین معادله فوق با $\overline{v_s}$ میتوان حاصل $\overline{v_l} + \overline{v_l}$ را بدست آورد:

$$\overline{v_s} + \overline{v_l} = \varepsilon_s \overline{v_s^s} + \varepsilon_l \overline{v_s^s} - \frac{\underline{k}}{\mu_l} \cdot \nabla \overline{P_l^1} = \overline{v_s^s} - \frac{\underline{k}}{\mu_l} \cdot \nabla \overline{P_l^1}$$
(""

و با قرار دادن طرف راست معادله (۳۴) در معادله (۳۱) می توان به شکل دیگری از اولین قانون بقا دست یافت:

$$\nabla \cdot \left(\overline{v_s^s} - \frac{\underline{k}}{\mu_l} \cdot \nabla \overline{P_l^l} \right) = 0 \tag{7a}$$

که به کمک این رابطه میتوان مقدار فشار مایع را بدست آورد. دومین معادله بقا از معادلات (۲۸) و (۳۵) حاصل میشود:

$$\frac{\partial \epsilon_{l}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\epsilon_{l} \overline{v_{s}^{s}} - \frac{k}{\mu_{l}} \cdot \nabla \overline{P_{l}^{l}} \right) = 0 \tag{77}$$

مقدار رطوبت در طی فرآیند را می توان توسط رابطه (۳۷) از مقدار جزء حجمی اقتباس کرد [۲۵]:

$$W = \frac{\varepsilon_1 \overline{\rho_1^1}}{(1 - \varepsilon_1) \overline{\rho_s^s}} \tag{magnetized}$$

۴-۲- بقای انرژی

با توجه به روابط انتقال حرارت، معادلات بقای انرژی به صورت زیر نوشته میشود:

$$\overline{\rho c_{p}} \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} - \nabla \cdot \left(K \cdot \nabla \overline{T} \right) = 0 \quad (\forall \Lambda \qquad \overline{\rho c_{p}} = \overline{\rho_{s}} c_{p_{s}} + \overline{\rho_{l}} c_{p_{l}} \quad (\forall \Lambda)$$

۴-۳- تعادل مکانیکی و تنش موثر

مجموع معادله (۸) و (۱۳) معادله تعادل مکانیکی۴۰ را تشکیل میدهد:

$$\nabla \cdot (\sigma) = 0 \tag{6}$$

می توان با استفاده از تئوری بایوت تنش کلی را به دو قسمت تقسیم بندی نمود که قسمت اول تـنش ناشـی از رفتـار اسـتاتیکی جامد و قسمت دوم تنشهای ناشی از فشار سیال است.

$$\sigma = \varepsilon_{\rm s} \sigma_{\rm s} - \varepsilon_{\rm l} \overline{P_{\rm l}^{\rm l}} {\rm I} \tag{4}$$

تنش موثر از حاصل جمع تنش کلی و فشار مایع معرفی می شود.

$$\sigma^{\rm eff} = \sigma + P_{\rm l}^{\rm l} {\rm I} \tag{47}$$

می توان بقای ممنتوم را با توجه به رفتار الاستیک به صورت رابطه (۴۳) نوشت:

$$\nabla \cdot \left(\lambda \cdot \operatorname{tr}(\varepsilon) \mathbf{I} + 2 \cdot \mu \varepsilon - \overline{\mathbf{P}_{l}^{l}} \mathbf{I} \right) = 0 \tag{477}$$

و تانسور کرنش را به صورت تابعی از جابجاییها تعریف نمود:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [(\nabla u) + (\nabla u)^{t} + (\nabla u)^{t} \cdot (\nabla u)]$$
(49)

معادلات (۳۸) تا (۴۴) فرآیندهای انتقال جرم، حرارت و ممنتوم را برای محیط متخلخل بازگو میکنند و با حل این معادلات میتوان تنشهای ناشی از خشک شدن و انقباض خشک شدن را محاسبه نمود.

۵- آزمایشات تجربی

با استفاده از آزمایشات تجربی میتوان مدت زمان خشک شدن، سرعت جابجایی و مقدار انقباضات نقاط مختلف قطعه را بدست آورد [۲۵]. مقادیر حاصل شده را میتوان با نتایج خروجی مدل مقایسه نمود و صحت عملکرد مدل و یا مقدار خطای ایجاد شده آن را محاسبه کرد. بدین منظور خشک کردن گل خاک رس در سه درجه حرارت ۳۵، ۵۵ و ۲۵ درجه سانتی گراد انجام و در طی بازههای زمانی قطعه وزن شده تا بتوان نمودار خشک شدن تجربی را بدست آورد. همچنین مقادیر کاهش حجم قطعه نیز به دلیل حذف رطوبت به صورت مکانیکی اندازه گیری شد و مقادیر حد انقباض و نیز سرعت حرکت ماده از اطلاعات فوق محاسبه گردید [۲۵]. از آنجا که محاسبه همه پارامترهای مورد نیاز مدل (مدول یانگ، مدول بالک و ضریب هدایت حرارت) به صورت تجربی وقت گیر و هزینه بر بود به ناچار مجبور به استفاده از مقادیر تجربی حاصل شده توسط محققان در سایر تحقیقات استفاده

جدول ۱ – پارامترها و مقادیر استفاده شده در مدل سازی

مقدار	پارامتر	مقدار	پارامتر
	تخلخل اوليه	2.6 Mpa	مدول بالک
$k=10^{-11}m^2 s^{-1}$	نفوذ پذيرى	$\lambda_s = 1.44 \text{ Jm}^{-2} \text{k}^{-1} \text{ s}^{-1}$	هدایت گرمایی
$\rho_s = 2610 \text{ kgm}^{-3}$	چگالی جامد	$\rho_l = 1000$ kg m ⁻³	چگالی مایع
C _p =1900Jkg ⁻¹ .C ⁻¹	ضریب گرمایی ویژه	$D = 1.554 \text{ e} - 8\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$	ضريب نفوذ

جهت محاسبه مقدار رطوبت قطعه، قطعه را در بازههای زمانی مختلف وزن کرده و اختلاف آن را با مقدار جرم ماده اولیه محاسبه و در نهایت درصد رطوبت آن بر اساس معیار خشک در هر لحظه حاصل می گردد. با حل معادلات بقا نیز می توان درصد رطوبت ناشی از مدل را محاسبه نمود. کاهش حجم با استفاده از پردازش تصویر و ۲ دوربین محاسبه گردید. کاهش جرم نیز با استفاده از ترازوی با دقت ۰/۰۱ گرم با اتصال به کامپیوتر کنترل شد. [۲۵]. بازههای ثبت تصویر و جرم ۵ دقیقه یک بار انتخاب شد. جهت انجام آزمایشات خشک کنی توسط محقق ساخته شده است که دو جداره بوده و مکانیزم انتقال حرارت در آن از نوع جابجایی است. در شکل ۳ خشک کن و تجهیزات آورده شده است.



شکل ۳- خشک کن و تجهیزات مورد استفاده

۶- روش حل عددی

پیچیدگی معادلات حاکم بر مسئله، تاثیر متغیرهای فیزیکی مختلف، گذرا بودن و بالا بودن هزینه های مربوط به تجهیزات آزمایشگاهی و محدودیت استفاده از دستگاههای اندازه گیری، آزمایشات تجربی را در مقایسه با روشهای عددی محدود میکنند. به همین دلیل روشهای عددی در عصر حاضر رشد چشم گیری داشته است.

شکل ۴ ابعاد نمونه مورد نظر را نشان می دهد که به خاطر تقارن و کاهش زمان حل، تنها یک چهارم قطعه مدل شده است.



۶-۱- شرایط مرزی

برای سطوح أدیاباتیک (سطوح تقارن قطعه) که هیچ عمل انتقال صورت نمی گیرد:

$$\nabla \overline{P_l^l} = 0 \qquad (\text{f} \Delta \quad \left(-K\nabla \overline{T}\right) \cdot n = 0 \qquad (\text{f} \beta$$

برای سطح بالایی (x=5, y=2.5) که در معرض انتقال حرارت و شار رطوبتی قرار دارند شرایط مرزی عبارتست از:

$$\left(-\frac{1}{\mu_{l}}\cdot VP_{l}^{n}\right)\cdot n = \frac{m}{\rho_{l}^{n}} \quad (\mathsf{fv}(-\mathsf{K},\mathsf{VT})\cdot n = -\mathsf{mh}_{v} + \mathsf{h}_{c}(\mathsf{T}_{e} - \mathsf{T}_{\infty}) \tag{fv}$$

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\mathbf{f} \circ \mathbf{F}_{m} = \mathbf{h}_{m} \rho_{g} (\mathbf{C}_{sat} - \mathbf{C}_{\infty}) \tag{(b)}$$

$$\dot{m} = \frac{h_m M_v}{RT_a} \left(P_{v,surf} - P_{v,a} \right) \quad (\Delta) \qquad h_m = \frac{h_c}{\rho_{air} C \rho_{air}} \qquad (\Delta)$$
$$h_c = \frac{K N u}{d_h} \quad (\Delta) \qquad \overline{Nu_L} = \left(0.825 + \frac{0.387 \times Ra_L^{1/6}}{\left(1 + \left(\frac{0.492}{P_r} \right)^{9/16} \right)^{8/27}} \right) \qquad (\Delta)$$

جهت سادهتر شدن مسئله مدلسازی با فرض همواره اشباع بودن مخلوط ۲ فازی انجام شده است، یعنی تنها انقباض تا نقطه بحرانی اتفاق میافتد. معادلات بقای فوق به کمک پارامترهای جدول ۱ در نرمافزار اجزاء محدود آباکوس و با استفاده از سابروتین و کد نویسی در نرمافزار پایتون انجام و نتایج حل با نتایج آزمایشات تجربی مقایسه شدهاند. بدین منظور از المان انتقال حرارت و ۴ گرهی با شماره DC2D4 استفاده شده است.

۷- نتايج و بحث

۷-۱- مقایسه مقادیر تجربی و مدل سازی

در شکلهای ۵ تا ۷ مقادیر مدلسازی شده کاهش رطوبت با مقادیر تجربی متناظر با آن، برای درجه حرارتهای مختلف آورده شده است. در طول فرآیند خشک شدن، چنانچه خاک اشباع باشد، ابتدا تخلخلهای بزرگ خشک می شوند. در نتیجه سطح میانی آب و هوا به سطح ذرات نزدیک و نزدیکتر می شود. حاصل این نزدیک شدن ذرات، کاهش تدریجی پیوستگی مایع است که منجر به کاهش سرعت خشک شدن شده و پایان مرحله اول را به دنبال دارد سرعت خشک شدن در مرحله اول ثابت است و منجر به کاهش سرعت خشک شدن شده و پایان مرحله اول را به دنبال دارد سرعت خشک شدن در مرحله اول ثابت است آب با نرخی مشخص از سطوح قطعه تبخیر می شود. با کاهش درجه اشباع، لوله های موئین جریان شکسته می شوند و رطوبت تنها از طریق لایه های نازک اطراف ذرات حرکت می کند در این حالت پیوستگی بخار اتفاق می فتد. سرعت خشک شدن ثابت تنها از طریق لایه های نازک اطراف ذرات حرکت می کند در این حالت پیوستگی بخار اتفاق می فتد. سرعت خشک شدن ثابت شدن از با نرخی مشخص از سطوح قطعه تبخیر می شود. با کاهش درجه اشباع، لوله های موئین جریان شکسته می شوند و رطوبت تنها از طریق لایه های نازک اطراف ذرات حرکت می کند در این حالت پیوستگی بخار اتفاق می فتد. سرعت خشک شدن ثابت شدن ار تباط نزدیکی به پیران شکسته می شوند و حرم مندن ثابت فرایت و مرحله خشک شدن مشخص هستند. توجیه منحنی خشک شدن ار تباط نزدیکی با پدیده انتقال حرارت و جرم دارد. قبل از خشک کردن، سطح قطعه کاملا از لایه ناز کی از آب پوشیده شده شدن ار تباط نزدیکی با پدیده انتقال حرارت و جرم دارد. قبل از خشک کردن، سطح قطعه کاملا از لایه ناز کی از آب پوشیده شده گونتن مقاومت در برابر انتقال جرم مشخص است که شرایط خارجی و لایه مرزی گاز، کننده سرعت خشک کردن را محدود گرفتن مقاومت در برابر انتقال جرم مشخص است که شرایط خارجی و لایه مرزی گاز، کننده سرعت خشک کردن را محرود گرفتن می می می موند.



شکل ۵- مقایسه مقادیر مدل با مقادیر تجربی برای خشک شدن در ۳۵ درجه سانتی گراد



شکل ۶- مقایسه مقادیر مدل با مقادیر تجربی برای خشک شدن در ۵۵ درجه سانتیگراد



شکل ۷- مقایسه مقادیر مدل با مقادیر تجربی برای خشک شدن در ۷۵ درجه سانتی گراد

به همین دلیل در شروع فرآیند سرعت خشک شدن ثابت و با ادامه آن روندی کاهشی دارد. شکل ۸ نمودار سرعت خشک شـدن (تبخیر) را نشان میدهد. این نمودار به صورت تجربی و در دمای ۳۵ درجه حاصل شد.



شکل ۸- تغییرات سرعت خشک شدن در دمای ۳۵ درجه

۷-۲- انقباض و تنش خشک کردن

مقدار کاهش حجم (انقباض) با استفاده از ترسیم نمودار حجم در برابر رطوبت برای یک نمونه در دمای ۳۵ درجه در شکل ۹ نشان داده شده است.



شکل ۹- نمودار حجم- رطوبت در درجه حرارت ۳۵ درجه

در شکلهای ۱۰ و ۱۱ مقدار انقباض خشک کردن و بردارهای کرنش، با مقایسه تصویر ابتدا و انتهای قطعه آورده شده است. اختلاف فاز در خشک شدن (بین سطح و عمق) سبب انقباض بیشتر سطح نسبت به عمق می شود به عبارت دیگر مدل در سطح به علت از دست دادن رطوبت تمایل به کوچک شدن دارد اما در عمق، مدل به دلیل از دست دادن رطوبت کمتر نسبت به سطح و حضور نیروهای موئینگی انقباض کمتری دارد و این اصلی ترین عامل برای ایجاد تنشهای کششی در سطح و وقوع ترک در طول فرآیند خشک شدن است و بایست با انتخاب شرایط محیطی مناسب و پارامترهای فرآیند، ایجاد ترک را کنترل نمود. شکل ۶ نمونهای از ترک ایجاد شده قطعه در درجه حرارت ۵۵ درجه سانتی گراد را نشان می دهد.